

TD n°6: Fonctions spéciales

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Fonctions elliptiques

Dans toute cette partie, on fixe un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$.



Exercice 1. L'équation différentielle satisfaite par $\wp$.

On pose, pour $n > 2$, la quantité :

$$G_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^n}$$

1. Démontrer que le développement au voisinage de 0 de $\wp$ est

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}(\Lambda)z^{2n}.$$

2. En déduire que $\wp$ satisfait l'équation différentielle

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4(\Lambda)\wp(z) - 140G_6(\Lambda).$$



Exercice 2. Uniformisation des courbes elliptiques.

1. En appliquant le principe de l'argument à un contour bien choisi, démontrer que pour $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\wp - a$ a exactement deux zéros (avec multiplicités) modulo Λ et en déduire que $\wp(z) = \wp(w)$ si et seulement si $z = \pm w \pmod{\Lambda}$, et que $\wp$ est surjective.
2. Soit f une fonction Λ -périodique avec un pôle d'ordre 3 en 0 et aucun autre pôle. Démontrer que f a trois zéros avec multiplicités modulo Λ . Dans le cas $f = \wp'$, expliciter ces zéros.
3. On définit $E_\Lambda \subseteq \mathbb{C}^2$ par

$$E_\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - 60G_4(\Lambda)x - 140G_6(\Lambda)\}.$$

Démontrer que $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ définit une bijection de $\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{0\}$ vers E_Λ .

Exercice 3. Le théorème d'addition.

1. Soient f une fonction Λ -périodique avec un pôle d'ordre 3 en 0 et aucun autre pôle, a, b, c les trois zéros de f distincts modulo Λ . En intégrant zf'/f sur un contour bien choisi, démontrer que $a + b + c \in \Lambda$.
2. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que ni z , ni w , ni $z + w$ n'appartiennent à Λ . En appliquant le fait précédent à $\wp' - A\wp - B$ pour A, B bien choisis, démontrer que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \\ 1 & \wp(z+w) & -\wp'(z+w) \end{bmatrix} = 0.$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Fonctions Gamma et digamma



Exercice 4. La fonction digamma.

On définit la fonction $\psi(s) = \text{dlog}\Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que ψ satisfait les équations fonctionnelles $\psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s}$ et $\psi(s) - \psi(1-s) = -\pi \cot(\pi s)$.
2. A l'aide de la formule du produit pour la fonction Γ , démontrer que

$$\psi(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right).$$

3. Démontrer que le développement en série entière de ψ au voisinage de 1 est donné par

$$\psi(1+s) = -\gamma + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) s^n.$$

Exercice 5. La formule de duplication.

Démontrer que

$$2 \log(2) + \psi(s) + \psi\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2\psi(2s)$$

et en déduire que

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

Fonction zêta et séries de Dirichlet

On définit la fonction ζ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Elle définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1$.



Exercice 6. Le produit eulérien.

On démontre l'égalité

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où le produit porte sur les nombres premiers. Pour $x > 0$ réel, on note S_x l'ensemble des nombres entiers naturels dont tous les facteurs premiers sont $\leq x$.

1. Démontrer que pour $x > 0$ réel, $\Re(s) > 1$, on a

$$\left| \prod_{p \leq x} \left(\sum_{k \leq M} p^{-sk} \right) - \sum_{n \in S_x, n \leq 2^M} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n > 2^M} \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

2. En déduire que

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s}.$$

3. Démontrer à l'aide de cette formule que

$$\left| \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} - \zeta(s) \right| \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^{\Re(s)}}$$

et en déduire la formule du produit eulérien pour ζ .

4. Dans le même esprit, fixons $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction totalement multiplicative, c'est-à-dire que $f(mn) = f(m)f(n)$. On suppose également que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > \sigma_0$. Démontrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}$$

pour $\Re(s) > \sigma_0$.



Exercice 7. La dérivée logarithmique de ζ .

On définit la fonction Λ de Von Mangoldt par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & n = p^k \text{ avec } p \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Exercice 8. L'anneau des séries de Dirichlet.

Formellement, l'anneau des séries de Dirichlet est l'anneau des suites de nombres complexes muni de la convolution arithmétique :

$$(a * b)_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}.$$

On dit qu'une série de Dirichlet est convergente s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que la série réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge.

1. Démontrer que la convolution arithmétique est commutative, associative, a pour unité la série de Dirichlet formelle associée à $(1, 0, 0, \dots)$ et distributive sur l'addition.
2. Démontrer qu'une série de Dirichlet convergente définit une fonction holomorphe dans un demi-plan supérieur $\Re(s) > \sigma$.
3. Démontrer que deux séries de Dirichlet convergentes définissent la même fonction si, et seulement si elles sont égales.
4. Démontrer que si les séries de Dirichlet correspondant à $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes, alors leur convolution arithmétique est convergente et vérifie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(a * b)_n}{n^s} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s} \right)$$

pour $\Re(s) > \sigma$.

5. Démontrer qu'une série de Dirichlet formelle est inversible si, et seulement si $a_1 \neq 0$.



Exercice 9. Produits eulériens formels.

On munit l'anneau des séries de Dirichlet formelles de la distance suivante :

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \frac{1}{\min\{n \geq 1 : a_n \neq b_n\}}.$$

1. Démontrer que d est bien une distance. On démontrera que $d(f, h) \leq \max(d(f, g), d(g, h))$.

2. Démontrer que dans l'anneau des séries de Dirichlet,

$$\left(1 - \frac{a}{m^s}\right) \cdot \left(\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}}\right) = 1$$

3. On fixe une suite $(a_p)_p$ de nombres complexes indexés sur les nombres premiers. Démontrer que

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où $a_n = \prod a_p^{v_p(n)}$ si $n = \prod p^{v_p(n)}$ et la convergence est entendue au sens de la distance d .

4. En déduire qu'une série de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

admet un produit de la forme ci-dessus si, et seulement si $a_{mn} = a_m a_n$ pour tous m, n .

5. Soit (b_{p^k}) une famille de nombres complexes indexée sur les puissances des nombres premiers, vérifiant $b_1 = 1$. On pose

$$f_p(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}.$$

Démontrer qu'on a convergence du produit infini

$$\prod_p f_p(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s}$$

où $b_n = \prod b_{p^{v_p(n)}}$ si $n = \prod p^{v_p(n)}$.

6. Démontrer qu'une série de Dirichlet formelle $(b_n)_n$ admet une représentation comme produit infini de séries entières en les p^{-s} si et seulement si $b_{nm} = b_n b_m$ pour tous n, m premiers entre eux : on dit que b est faiblement multiplicative.
7. En déduire que les suites faiblement multiplicatives (ou les séries de Dirichlet associées) forment un sous-groupe des inversibles de l'anneau des séries de Dirichlet formelles (en particulier, la convolution de deux suites faiblement multiplicatives est encore faiblement multiplicative !). Expliciter un isomorphisme entre ce sous-groupe et le groupe $\Lambda(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$, où $\Lambda(\mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif des séries entières à coefficients complexes de terme constant 1.